

JIŘÍ ŠVEC*, PAVEL ŠVEC**

BODOVÉ A NEBODOVÉ ZDROJE FYZIKÁLNÍCH POLÍ

POINT AND NON-POINT SOURCES OF PHYSICAL FIELDS

Abstrakt

Při řešení fyzikálních a technických problémů se často používají různá zjednodušení, která vedou k rychlejšímu – byť méně přesnému – řešení. Publikace se zabývá možností zjednodušení nebodových zdrojů fyzikálních polí na zdroje bodové a definuje podmínky, kdy je takové zjednodušení možné.

Abstract

When solving physical and engineering problems, various simplifications leading to faster – although less accurate – solutions are often used. The publication deals with a possibility of simplifying non-point sources of physical fields to point sources, and defines conditions under which such a simplification is possible.

Key words: physical field, point source, non-point source, electric field, luminous field, simplification conditions

Úvod

Při řešení fyzikálních a technických problémů se často používají různá zjednodušení. Ta vedou k rychlejšímu a jednoduššímu řešení daného problému.

Pravděpodobně nejznámější je zjednodušení obecného tělesa na hmotný bod v mechanice. Hmotný bod je těleso, jehož tvar a rozměry můžeme při řešení daného problému zanedbat. Důležité je, že každé zjednodušení musíme vztáhnout k danému problému. V tomto případě je např. nutné porovnat velikost tělesa s prostorem, ve kterém se těleso bude pohybovat. Je tedy zřejmé, že stejné těleso můžeme v určitých podmínkách považovat za

*doc. RNDr., VŠB – Technická univerzita Ostrava, FBI, Katedra bezpečnostního managementu, Lumírova 13, 70030 Ostrava – Výškovice, jiri.svec@vsb.cz

**Ing., VŠB – Technická univerzita Ostrava, FMMI, Katedra automatizace a počítačové techniky v metalurgii, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava – Poruba, pavel.svec@vsb.cz

hmotný bod, v jiných podmínkách musíme jeho pohyb řešit obecně a zjednodušení na hmotný bod provést nelze (např. pohyb tenisového míčku na tenisovém kurtu – pohyb stejného míčku na papíře formátu A4). Zjednodušení tělesa na hmotný bod mj. znamená, že poloha tělesa je dána jen jednou trojicí souřadnic a že při řešení pohybu tělesa můžeme zanedbat jeho rotaci.

Bodové a nebodové zdroje fyzikálních polí

Za bodový zdroj fyzikálního pole můžeme považovat zdroj pole, jehož rozměry a tvar lze při řešení daného problému zanedbat. Nebodový zdroj tuto podmínku nespĺňuje. K nebodovým zdrojům fyzikálních polí patří zdroje lineární (např. dráty), plošné nebo obecné (tělesa).

Zjednodušující podmínku určíme podle přesnosti, se kterou chceme daný výpočet provést. Obvykle dostačuje když rozdíl mezi veličinou vypočítanou pro pole vyvolané bodovým zdrojem (x_b) a veličinou vypočítanou obecně pro nebodový zdroj pole (x) není větší než jedno procento. Tedy

$$x_b = 1,01x \quad (1)$$

Jak se s pojmy bodový a nebodový zdroj fyzikálního pole pracuje, lze ukázat na následujících příkladech.

Elektrické pole

Intenzita elektrického pole

Intenzita elektrického pole bodového elektrického náboje ve vakuu se vypočítá dle vztahu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{NC}^{-1}, \text{Vm}^{-1}) \quad (2)$$

kde ϵ_0 – permitivita vakua
 Q – náboj (C)
 r – vzdálenost místa od náboje (m)

Tento vztah ovšem platí přesně jen pro bodové náboje nebo nabitě homogenní koule (vzdálenost se pak měří od středu koule).

Pokud nabitá tělesa nelze považovat za bodové zdroje je situace poněkud komplikovanější a intenzitu elektrického pole pak musíme vypočítat dle vztahu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} \quad (3)$$

kde dQ – element elektrického náboje

Pak můžeme rozlišit:

1. Lineární zdroje elektrického pole (např. nabitý drát), které charakterizujeme lineární hustotou elektrického náboje (velikost náboje vztažená na jednotku délky drátu)

$$\tau = \frac{dQ}{dl} (\text{Cm}^{-1}) \quad (4)$$

a intenzitu elektrického pole pak vypočítáme dle vztahu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau dl}{r^2} \quad (5)$$

2. Plošné zdroje elektrického pole (např. nabitá rovina), které charakterizujeme plošnou hustotou elektrického náboje (velikost náboje vztažená na jednotku plochy)

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} (\text{Cm}^{-2}) \quad (6)$$

a intenzitu elektrického pole pak vypočítáme dle vztahu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r^2} \quad (7)$$

3. Objemové zdroje elektrického pole (tj. nabitá tělesa), které charakterizujeme objemovou hustotou elektrického náboje (velikost náboje vztažená na jednotku objemu)

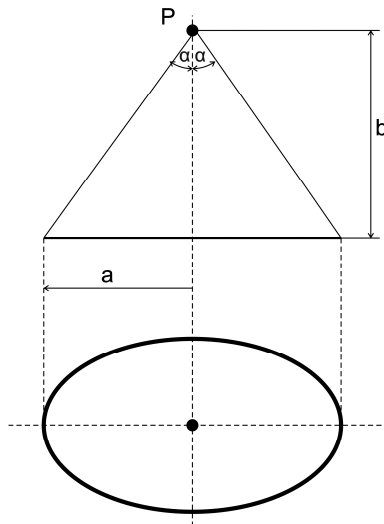
$$\rho = \frac{dQ}{dV} (\text{Cm}^{-3}) \quad (8)$$

a intenzitu elektrického pole pak vypočítáme dle vztahu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r^2} \quad (9)$$

Elektrické pole nabitého prstence

Tenký drát je stočen do prstence o poloměru a , celkový elektrický náboj prstence je Q . Intenzitu elektrického pole stanovíme v bodě P na ose prstence ve vzdálenosti b od středu prstence (obr. 1).



Obr. 1. K výpočtu intenzity elektrického pole nabitého prstence.

Pomocí vztahu (5) lze pro hledanou intenzitu odvodit vztah [1]

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Označení veličin vyplývá z obr. 1.

Pokud je vzdálenost b mnohem větší než poloměr prstence a – tj $b \gg a$ – pak se vztah (10) zjednoduší na

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \quad (11)$$

což odpovídá vztahu pro intenzitu bodového náboje umístěného ve středu prstence.

Podmínku pro zjednodušení pro jednocentní rozdíl velikosti intenzity vypočítané obecně (rovnice 10) a zjednodušeně (rovnice 11) určíme z rovnice (dle vztahu 1)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} = 1,01 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (12)$$

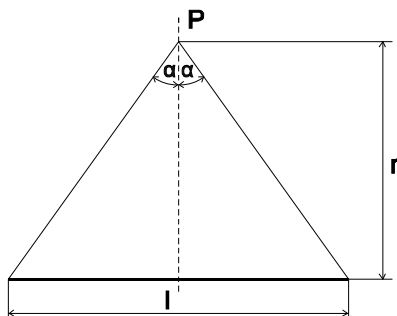
Řešením této rovnice dospějeme k výsledku

$$b = 11,9a \doteq 12a$$

Pokud tedy vzdálenost od středu prstence převyšší dvanáctkrát poloměr prstence, lze pro výpočet intenzity elektrického pole použít vztah pro výpočet intenzity elektrického pole bodového náboje, umístěného ve středu prstence.

Elektrické pole nabitého drátu

Tenký drát délky l je nabit elektrickým nábojem Q (lineární hustota náboje je τ). Intenzitu elektrického pole stanovíme v bodě P, který je na ose symetrie drátu ve vzdálenosti r (obr. 2).



Obr. 2 K výpočtu intenzity elektrického pole nabitého drátu.

Pomocí vztahu (5) lze pro hledanou intenzitu odvodit vztah [1]

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} \sin \alpha \quad (13)$$

Označení veličin vyplývá z obr. 2.

Dosadíme-li do vztahu (13) dle obr. 2

$$\sin \alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}}$$

Obdržíme

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}} \quad (14)$$

Za předpokladu dostatečné vzdálenosti bodu P od drátu ($r \gg l$), lze vzorec (14) zjednodušit na

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (15)$$

což odpovídá intenzitě pole bodového náboje, který je umístěn uprostřed nabitého drátu.

Podmínku pro zjednodušení pro jednocentní rozdíl velikosti intenzity vypočítané obecně dle (14) a zjednodušeně pro bodový náboj dle (15) určíme z rovnice (viz. vztah 1)

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 1,01 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}} \quad (16)$$

Řešením této rovnice dospějeme k výsledku

$$r = 3,57l$$

Pokud tedy vzdálenost r od středu drátu bude více než 3,57 krát větší než délka drátu, lze pro výpočet intenzity elektrického pole použít vztah pro výpočet elektrické intenzity pole bodového náboje umístěného ve středu drátu.

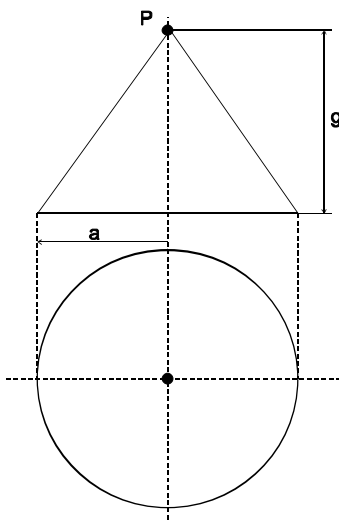
Světelné pole

Osvětlení plošným zdrojem

Osvětlení bodu P , který leží na ose kruhového kotouče o poloměru a a jasu L ve vzdálenosti g od středu kotouče (obr. 3) se vypočítá podle vztahu [2]

$$E = \frac{LS}{a^2 + g^2} \quad (17)$$

kde $S = \pi a^2$



Obr. 3. K výpočtu osvětlení plošným zdrojem.

Pro dostatečnou vzdálenost bodu P od kotouče, můžeme kotouč považovat za bodový zdroj světla a osvětlení vypočítat podle vztahu

$$E = \frac{LS}{g^2} \quad (18)$$

Podmínku zjednodušení pro jednocentní rozdíl velikosti osvětlení vypočítaného obecně (17) a zjednodušeně (18) určíme z rovnice (dle vztahu 1)

$$\frac{LS}{g^2} = 1,01 \frac{LS}{a^2 + g^2} \quad (19)$$

Řešením této rovnice dospějeme k výsledku

$$g = 10a$$

pokud tedy vzdálenost g od středu kotouče bude desetkrát větší než poloměr kotouče a , lze kotouč považovat za bodový zdroj světla.

Literatura

1. Fuka ,J.,Havelka,B.: Elektřina a magnetismus, SNTL,Praha 1965
2. Fuka ,J.,Havelka,B.: Optika a atomová fyzika. I.Optika, SPN Praha 1961.

Summary

In the submitted contribution, terms “point” and “non-point” sources of physical field are discussed. By practical exercises (calculation of electric field intensity, calculation of illumination by an extended source of light), ways of working with these sources are shown.